

## Introducción

La teoría de grupos ha sido estudiada ya por muchos años. Cabe mencionar que cuando uno estudia Matemáticas, uno lo hace por la belleza intrínseca que este magnífico arte tiene. Y lo llamo arte porque las Matemáticas se diferencian de las demás ciencias naturales, en el sentido de que cualquier ciencia natural, estudia la naturaleza, y por esto necesita siempre de la comprobación experimental de una teoría o bien del empirismo adquirido al observar la naturaleza. Las Matemáticas no requieren de eso, son abstractas, están en nuestras mentes y en nuestros corazones y no necesitan de la observación de la naturaleza para existir. Naturalmente que muchos de los problemas de Física han motivado y seguirán motivando nuevas Matemáticas, pero aunque la Física lleve a las Matemáticas, éstas se siguen desarrollando en la abstracción total. Es en ese sentido que me atrevo a mencionar, como alguna vez mencionó un físico y filósofo de esta universidad, aunque refiriéndose a la religión y no a las Matemáticas (Dr. Pomposo) que las Matemáticas son inútiles, en el sentido de que son supraútiles, es decir no necesitan tener ninguna utilidad práctica y concreta para existir. No es el mismo caso en las demás ciencias naturales. Es precisamente esta suprautilidad fuera de todo pragmatismo que hace a este arte tan atractivo para tantas personas.

Quise mencionar estos aspectos en la introducción para dejar en claro que el estudio de la Teoría de Grupos se puede desarrollar en sí, sin ninguna aplicación a la Física. Si se hace esto uno encuentra un mundo maravilloso de estudio y reflexión y sobre todo de abstracción. Sin embargo el fin de este trabajo no solo es exponer los lineamientos generales de la Teoría de Grupos, sino también su aplicación a la Mecánica Cuántica, lo cual se hace de una manera muy elegante.

La Física como la conocemos hoy busca continuamente simetría y conservación. El argumento de porqué se buscan estas cosas es más filosófico que físico. Pero existe un aspecto fundamental. Por ejemplo la simetría según los psicólogos está fuertemente relacionada con la concepción de belleza que tenemos. Al menos esto funciona para las personas, i.e., una persona que tiene una cara simétrica es más bella. Es quizá por este motivo (prácticamente intuitivo) que los físicos de hoy en día buscan que las leyes, los sistemas físicos, etc. sean simétricos. Esto le da un carácter estético a la Física. Resulta ser que cada caso de operaciones que involucran simetría forman un grupo. Así con la Teoría de Grupos podemos tratar matemáticamente los invariantes y las simetrías. Con la Teoría de Grupos podemos dar formalización a conceptos como la reflexión espacial, la paridad, el momento angular, etc. Un ejemplo claro es la distancia entre dos puntos, que se mantiene invariante bajo rotaciones y traslaciones.

Voy a empezar el trabajo hablando acerca de los axiomas de la Teoría de Grupos para a partir de ahí construir unos ejemplos que serán útiles para su comprensión. Dentro de estos ejemplos también habrá ejemplos que estén más orientados a la Mecánica Cuántica. Posteriormente tengo que hablar de un concepto básico que son las representaciones, aquí también hablaré acerca de la reducibilidad y de la irreducibilidad que son fundamentales en la Teoría de Grupos. Más adelante se explicarán los grupos de Lie, así como el Álgebra de Lie (en honor al matemático noruego Sophus Lie).

Uno de los puntos fundamentales que tocaré a lo largo de esta discusión son los grupos unitarios  $SU(2)$  y el grupo de rotación  $SO(3)$ , que como se verá son esenciales en Mecánica Cuántica.

En toda esta discusión entrará una aplicación al momento angular. Después hablaré un poco acerca del espín del electrón desde el punto de vista de Teoría de Grupos. Con la idea del espín en mente hablaré del isoespín y del “eightfold way” que se utilizan en la Física de las partículas elementales.

Finalmente hablaré de unos entes matemáticos, desconocidos para la mayoría, pero no por eso menos importantes: Los cuaterniones. La discusión de éstos será totalmente cualitativa e histórica, y se verá como también pueden ser usados en Mecánica Cuántica.

Empezaremos la discusión con una definición.

**Definición 1.** Un conjunto  $G$ , con un número finito o infinito de elementos, para los que se ha definido una cierta ley de composición (o de multiplicación), es un grupo si satisface las condiciones siguientes (axiomas de la Teoría de Grupos):

1. Es cerrado. A cada par de elementos  $A$  y  $B$  de  $G$ , el producto o composición  $AB = C$ , genera un elemento que también está en  $G$ .
2. Ley asociativa. Si  $A$ ,  $B$  y  $C$  son tres elementos cualesquiera de  $G$ , no necesariamente distintos, entonces:  $(AB)C = A(BC)$
3. Elemento unidad:  $G$  contiene el elemento  $I$  llamado elemento unidad, tal que para todo elemento  $A$  de  $G$ :  $AI = IA = A$
4. Elemento inverso: A cada elemento  $A$  de  $G$  le corresponde otro elemento  $A^{-1}$  tal que:  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ .

Un quinto axioma más define los grupos abelianos o conmutativos:

5. El grupo que tiene la propiedad adicional de que para cada dos de sus elementos  $AB = BA$  se llama grupo abeliano o conmutativo.

Es importante señalar que en base a estos axiomas se puede demostrar el hecho de que el elemento unidad  $I$  en un grupo  $G$  es único, lo mismo puede demostrarse para el inverso  $A^{-1}$  es único.

Trivialmente se pueden dar unos ejemplos clásicos de grupos. Así todos los números racionales positivos forman un grupo respecto a la multiplicación ordinaria. En este caso es claro ver que el inverso de  $a$  es  $1/a$  que es un racional. Además el conjunto de todos los enteros forma un grupo abeliano respecto a la adición.

Quizá uno de los grupos más importantes es el grupo de matrices. Es importante ya que en el Álgebra Lineal (por lo menos para espacios vectoriales de dimensión finita\*) se demuestra que existe un isomorfismo entre las transformaciones lineales y las matrices, i.e., existe una relación uno a uno. Esto es de profunda utilidad en Mecánica Cuántica pues en ésta se utilizan mucho los operadores lineales a los que se les puede asociar, por el teorema mencionado, una matriz. De esta forma los siguientes conjuntos de matrices forman grupos, respecto a la multiplicación matricial clásica:

- a) Todas las matrices no singulares de orden prefijado  $n$
- b) Todas las matrices ortogonales de orden prefijado  $n$
- c) Todas las matrices ortogonales de orden prefijado y de determinante  $+1$ .

A continuación menciono varios ejemplos más de grupos:

1. Otro ejemplo clásico es el de las rotaciones reales en el espacio tridimensional que dejan fijo el origen, éstas forman un grupo no conmutativo o no abeliano, que es precisamente el grupo de rotación  $O_3$ , o también se le llamará  $SO(3)$  ( $SO$  por “Special Orthogonal”).

2. El grupo de Lorentz que consiste en todas las transformaciones no singulares en un espacio vectorial real tetradimensional, que dejan la forma cuadrática invariante:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$$

3. Los grupos especiales lineales  $SL(n)$  (donde  $n$  es el orden prefijado) que pueden estar definidos sobre los complejos o sobre los reales y son el grupo de transformaciones lineales de determinante uno.

4. El grupo especial unitario  $SU(n)$  es el grupo de las transformaciones unitarias de un espacio vectorial complejo  $n$ -dimensional con determinante uno. Las transformaciones unitarias son las que  $UU^+=1$  donde  $U^+$  es el operador adjunto.

5. El grupo  $G_n$  que consiste de todas las permutaciones uno a uno de  $n$  objetos.

6. Un ejemplo muy bonito es el grupo de los números  $1, i, -1$  y  $-i$ , éstos forman un grupo abeliano de orden 4 (por orden entiendo el número de elementos en el grupo  $G$ ), respecto a la multiplicación ordinaria, donde  $i = (-1)^{1/2}$ .

El concepto de isomorfismo (que es una relación uno a uno) es conveniente aclararla. Normalmente se entiende por un isomorfismo entre dos espacios vectoriales si existe una transformación lineal biunívoca entre los dos espacios vectoriales<sup>1</sup>.

**Definición 2.** Dos grupos  $G$  y  $H$  se llaman isomorfos si se puede establecer una correspondencia biunívoca de sus elementos, de modo que:

$AB = C$  implique  $A'B' = C'$  y recíprocamente, ó también si  $(AB)' = A'B'$ . Es decir la multiplicación de dos elementos en un grupo implica la multiplicación de sus dos elementos correspondientes en el otro.

El ejemplo 6 anteriormente mencionado forma un isomorfismo con las matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow i$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -i$$

Si  $A$  es un elemento de un grupo  $G$  de orden  $g$  y consideramos la sucesión de potencias de  $A, I, A, A^2, A^3, \dots$  todas las cuales son elementos de  $G$  si no éste último no sería un grupo. Al fijar el orden del grupo en  $g$ , hemos dicho que el grupo es de orden finito, y es por esto que estos elementos no pueden ser todos distintos. Debe de existir la igualdad:  $A^k = A^l$ , por lo que  $A^{k-l} = I$ . De esta manera se demuestra que un grupo finito cada elemento tiene alguna potencia igual al elemento unidad.

**Definición 3.** El menor entero positivo  $h$ , para el que  $A^h = I$  se llama orden (o período de  $A$ ). Hay que tener cuidado en no confundir el orden de un elemento del grupo con el orden de un

---

<sup>1</sup> Una transformación biunívoca es una transformación que es inyectiva y sobreyectiva, es decir uno a uno.

grupo  $G$  que indica el número de elementos que éste tiene. Con relación a esto existe un teorema que nada más mencionaré:

**Teorema 1.** Si  $C$  es de orden  $mn$ , siendo  $m$  y  $n$  primos entre sí, puede expresarse unívocamente por el producto de dos elementos conmutativos  $M$  y  $N$  de órdenes  $m$  y  $n$  respectivamente.

Ahora existe un cierto tipo de grupos que están formados solo por las potencias de un elemento  $A$  y en un momento dado una cierta potencia de  $A$  es de nuevo la unidad. Así tenemos la siguiente definición:

**Definición 4.** Un grupo es cíclico si sus elementos pueden expresarse por las potencias de uno solo de ellos.

Se puede verificar que los grupos cíclicos del mismo orden son isomorfos entre sí. Esto se logra haciendo que correspondan sus elementos generadores. Y es lógico ver que todos los grupos cíclicos son abelianos, i.e., conmutan.

Un ejemplo claro de este tipo de grupos es el formado por  $g = e^{2\pi i/c}$ . De esta manera se puede ver que los elementos  $I, g, g^2, g^3, \dots, g^{c-1}$ , forman un grupo cíclico de orden  $c$ . Aunque este grupo parece bastante abstracto, no lo es, ya que  $g$  tiene un ángulo asociado y ese ángulo puede estar asociado con una rotación. El elemento identidad es obviamente el que no rota al objeto, vector o ente en cuestión. De manera que para este tipo de grupo después de una serie de rotaciones el ente queda invariante. Este es un ejemplo que puede tener varias aplicaciones a la Física.

Si un subconjunto no vacío  $H$  de  $G$ , es un grupo, a  $H$  se le llama subgrupo de  $G$ . Para que  $H$  sea un subgrupo basta que satisfaga que si  $A$  y  $B$  están en  $H$  entonces también lo está  $AB$  y que si  $A$  está en  $H$  entonces también esté el elemento inverso  $A^{-1}$ .

El centro de un grupo es el subgrupo que consiste de todos los elementos  $Z$  que conmutan con todos los elementos  $A$  del grupo:

$ZA = AZ$ , para todos los  $A \in G$ .

Ahora bien, la clase de residuos  $BH$  de un subgrupo  $H$  en  $G$  se obtienen multiplicando un elemento  $B \in G$  por todos los elementos de  $H$ . Dos elementos  $A$  y  $B$  pertenecen a la misma clase si y solo si  $B^{-1}C \in H$ . De manera que dos clases de residuo diferentes no pueden tener un elemento en común, y la unión de todas las clases de residuos forman el grupo  $G$ . Este concepto no es nada nuevo. El concepto generalizado de clase que se maneja en Matemáticas siempre genera una partición, es decir un conjunto de subconjuntos cuya intersección es cero y cuya unión forma al conjunto original. Si los elementos de una clase de residuo  $AH$  se multiplican por los elementos de otra clase de residuo  $BH$ , el resultado puede o no ser una clase de residuo. La única manera de que sea una clase de residuo es que se suponga que  $AHA^{-1} \in H$ . Tales subgrupos reciben el nombre de divisores normales de  $G$  ("Normal divisors"). De esta manera si  $H$  es un divisor normal de  $G$ , entonces el producto  $AHBH$  es una clase de residuo puesto que:

$$AHBH = A(HB)H = A(BH)H = ABH^2 = ABH.$$

Este ultimo paso se debe a que estamos hablando del mismo  $H$ , hay que tener cuidado aquí, se habla del mismo  $H$  y no del producto cartesiano  $H \times H$ . De esta forma las clases de residuo forman un grupo, este grupo se le conoce como el grupo de clase residual y se denota por  $G/H$ . En un grupo abeliano, por ejemplo en un espacio vectorial, cualquier subgrupo es un divisor normal, de manera que el grupo de clase residual siempre se puede formar. Con relación a esto existe un teorema que vale la pena mencionar:

**Teorema 2.** Si  $F$  es un mapa homomorfo de  $G$  (donde  $G$  es un grupo) entonces ese mapa es isomorfo al grupo de clase residual  $G/N$  donde  $N$  es el divisor normal que consiste de todos los elementos de  $G$  cuyo mapa es 1.

Es importante resaltar que este teorema de homomorfismo resulta aplicable a los homomorfismos operacionales. Un grupo importante de homomorfismos es el que está formado por las representaciones de los grupos. Debo aclarar lo que se entenderá de ahora en adelante por una representación, ya que éste es un concepto básico de la Teoría de Grupos. Si los elementos de un grupo son mapeados a transformaciones lineales de un espacio vectorial, o bien matrices (por el isomorfismo entre aquellas y éstas) tal que  $AB$  sean ahora  $A'B'$  donde  $A$  y  $B \in G$  y  $A'$  y  $B'$  son las matrices o los operadores lineales, a estos isomorfismos se les llama representaciones  $\phi$  de  $G$  por transformaciones lineales. La dimensión del espacio vectorial sobre el que actúan las transformaciones lineales se le conoce como el grado de la representación  $\phi$ . Y por una representación verdadera se entenderá si la representación  $\phi$  es uno a uno, esto es decir si hay una biyección. Esto es exactamente igual a lo que se mencionó como definición 2, con la peculiaridad que se trata de un mapeo especial, no de cualquier mapeo. Las definiciones a veces hacen difícil la comprensión del concepto para el lector, de manera que volveré a mencionar la definición de otra manera. Una representación  $\phi$  es un homomorfismo (es decir un mapeo que preserva los productos, i.e., como se menciona en la definición 2, sin que sea un mapeo biunívoco) que mapea de un grupo  $G$  a un conjunto de transformaciones lineales o matrices de un espacio vectorial. Si la representación  $\phi$  es biunívoca, i.e., si existe un isomorfismo entre  $G$  y el conjunto de transformaciones lineales, entonces a  $\phi$  se le llama representación verdadera.

A continuación se mencionará como se pueden aplicar las representaciones de un grupo a Mecánica Cuántica. La ecuación de Schrödinger  $H\psi=E\psi$  es invariante respecto a ciertas transformaciones de la posición, como por ejemplo:

- a) Es invariante si se permutan las coordenadas de los electrones y de núcleos iguales.
- b) Todas las translaciones, rotaciones y reflexiones que dejan el campo de fuerzas invariantes y por lo tanto el Hamiltoniano  $H$ . Por ejemplo supongamos que tenemos un átomo en un campo eléctrico homogéneo. Entonces todas las rotaciones alrededor de un punto fijo se pueden reemplazar por todas las rotaciones alrededor del eje fijo, que es el eje del campo eléctrico. Algunas reflexiones también dejan el campo invariante.

Estas transformaciones, como reflexiones, rotaciones, etc. que dejan el Hamiltoniano invariante siempre forman un grupo  $G$ . ¿Por qué sucede esto? Es simple, si las transformaciones  $A$  y  $B$  dejan  $H$  invariante entonces también lo hace  $AB$ , es decir dos rotaciones sucesivas, o dos traslaciones sucesivas. Y por supuesto  $A^{-1}$  también deja invariante el Hamiltoniano.

Supongamos que una transformación  $T$  transforma de las coordenadas  $x, y, z$ , a las coordenadas  $x', y', z'$ . De manera que  $\psi' = T\psi$ , de acuerdo con:  $\psi'(x', y', z') = \psi(x, y, z)$ . Si esta transformación es lineal, lo que se puede verificar trivialmente podemos aplicar las ideas que se acaban de mencionar. Supongamos que dos transformaciones  $S$  y  $T$  dejan el Hamiltoniano  $H$  invariante. Así  $(ST)\psi = S(T\psi)$  también deja el Hamiltoniano invariante, i.e., dejan la ecuación de Schrödinger invariante, eso significa que transforma las soluciones  $\psi$  a las  $\psi'$  que pertenecen al mismo eigenvalor de la energía. De esta forma las eigenfunciones de un nivel dado de energía son transformadas linealmente por un grupo  $G$ , estas transformaciones forman una representación de este grupo  $G$ .

El concepto de un subespacio invariante de  $U$  es importante. Se trata de un subespacio lineal  $V$  que se transforma en sí mismo a través de un grupo  $G$ . Si ese subespacio invariante existe y contiene no solo el vector cero y tampoco es igual al espacio vectorial original  $U$ , entonces la representación se llama reducible, y el espacio vectorial  $U$  también se llama reducible con respecto al grupo  $G$ .

Para encontrar la forma de las matrices de una representación reducible se procede como sigue. Primero que nada escogemos vectores de una base  $u_1, \dots, u_h$  en el subespacio  $V$ . Ahora esos vectores los extendemos en una suma de vectores de la base de todo el espacio  $U$  (en la base el índice de los vectores corre hasta  $n$ ). Así se tiene:

$$Au_m = u_i p_{im} \quad (m = 1, \dots, h)$$

$$Au_t = u_i q_{it} + u_i s_{it} \quad (t = h+1, \dots, n)$$

De esta forma la matriz  $A$  tiene la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} P & Q \\ 0 & S \end{pmatrix} \quad \text{Donde tanto } P, Q \text{ como } S \text{ son matrices a su vez, de manera que es una "megamatriz" con muchos ceros en la parte inferior izquierda.}$$

Es posible hacer los elementos de la matriz  $Q$  cero. Esto se logra mediante una elección adecuada de los vectores. De manera que todos los vectores  $u$  con índice superior a  $h$  generan otro subespacio invariante, llamémosle  $W$ . En este caso todo el espacio  $U$  es la suma directa de  $V$  y de  $W$ . Así se puede escribir:

$$U = V \oplus W$$

De esta forma ahora la matriz  $A$  tiene la forma  $A = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$

Y la representación es la suma de las representaciones  $\varphi' (A \rightarrow P)$  y  $\varphi'' (A \rightarrow S)$ :  $\varphi = \varphi' + \varphi''$ .

Vale la pena mencionar un teorema en el que se involucra el concepto de isomorfismo.

**Teorema 3.** Para cualquier divisor normal  $V$  y cualquier subgrupo  $W$  de un grupo  $G$  existe un isomorfismo entre  $VW$  y  $W/D$ . Donde  $VW$  es un grupo formado por todos los productos  $vw$ , donde  $v \in V$  y  $w \in W$ , y  $D$  es la intersección de  $V$  y  $W$ .

Lo que se hizo anteriormente también se puede hacer en el caso de que haya más de dos subespacios vectoriales, o lo que es su análogo en el caso en el que tenga varios subgrupos en un mismo grupo. Si se cumplen las mismas condiciones que se dijeron para el caso de  $U$ , podríamos establecer que  $L = B_1 \oplus B_2 \oplus \dots \oplus B_h$ . Es decir que  $L$  sea la suma directa de varios subespacios vectoriales o en su caso de varios subgrupos. De hecho una condición necesaria y suficiente para que esto se de es que cada uno de los  $B$ 's tenga solo el cero como elemento común con la suma de los  $B$ 's de la izquierda. Un grupo aditivo (es decir un grupo en el que la operación es la suma) se le llama irreducible o mínimo si no tiene ninguno subgrupo aceptable menos el mismo y el subgrupo que consiste del cero únicamente. El grupo se llama completamente reducible si el grupo es la suma directa de subgrupos irreducibles. Es lógico que en este caso las representaciones se puedan escribir como  $\varphi = \varphi_1 + \dots + \varphi_h$ .

La forma que tomará ahora la matriz A será la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_h \end{pmatrix}$$

Donde hay muchas matrices P's en medio y los ceros también son matrices.

Este concepto de reducibilidad es importante en Mecánica Cuántica, sobre todo esto se usa mucho en teoría de perturbaciones. Si los niveles de energía de un átomo o de cualquier sistema cuántico se saben hasta un cierto grado y se toma una aproximación del Hamiltoniano y se añaden los términos perturbativos como  $\epsilon W$  tenemos:

$$H = H_0 + \epsilon W$$

Las eigenfunciones sin perturbación y las funciones perturbadas en un cierto nivel de energía se pueden transformar linealmente mediante transformaciones de  $G$ , donde este grupo es el grupo de los invariantes del Hamiltoniano  $H$ . Las representaciones del grupo pueden ser reducibles o irreducibles. Puede suceder que varios estados de energía sean iguales cuando  $\epsilon$  tiende a cero. De esta manera se tiene una representación reducible. Sin embargo una representación irreducible nunca, ni en el límite, se puede transformar en una representación reducible. Así, si tenemos, en un espacio de eigenfunciones de un Hamiltoniano no perturbado  $H_0$ , una representación irreducible del grupo que deja invariante al Hamiltoniano total, la perturbación nunca da lugar a una separación del eigenvalor de la energía. Es más después de la perturbación todavía tenemos una representación irreducible del mismo grado  $n$ .

Si para  $\epsilon = 0$  tenemos una representación completamente reducible de grado  $n$ , que es la suma de  $r$  representaciones irreducibles, entonces el eigenvalor de la energía  $E$  se puede separar en  $r$  términos a lo mucho.

A continuación es indispensable hablar acerca de los grupos de Lie. Un grupo de Lie es un grupo y al mismo tiempo una variedad<sup>2</sup> de  $n$  dimensiones, lo que significa que en cada vecindad de  $T_0$ , los elementos  $T(s)$  del grupo se determinan por medio de  $n$  parámetros. En general si  $U$  es una vecindad del elemento unidad  $I$  de un grupo de Lie  $G$  y si  $T(s)$  es un elemento en  $U$  que corresponde a  $n$  parámetros entonces si  $T(s)$  y  $T(t)$  están lo suficientemente cerca de la unidad  $T(s)T(t)$  y  $T(s)^{-1}$  estarán de nuevo en  $U$ . De manera que podemos escribir:

$$T(s)T(t) = T(u)$$

$$T(s)^{-1} = T(v)$$

De ahora en adelante se asumirá que  $T(s)T(t) = T(s + t)$  y  $T(s)^{-1} = T(-s)$ . Esto está demostrado por el teorema de Gleason, Montgomery y Zippin. He querido omitir los detalles

---

<sup>2</sup> Una variedad no es más que la generalización del concepto de superficie que se ve en Matemáticas

porque el tratamiento es demasiado matemático y nos aleja de nuestro objetivo original. De todos modos se puede dar una interpretación a lo que se acaba de escribir. Por ejemplo si T es una rotación en 3 ó 2 dimensiones, entonces voy a definir la matriz de rotación en 2 dimensiones por comodidad de la siguiente manera:

$$T(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Si ahora aplico una rotación y después otra tengo:

$$\begin{aligned} T(\varphi)T(\theta) &= \\ \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\sin\theta + \sin\varphi\cos\theta \\ -\sin\varphi\cos\theta - \cos\varphi\sin\theta & \cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi + \theta) & \sin(\varphi + \theta) \\ -\sin(\varphi + \theta) & \cos(\varphi + \theta) \end{pmatrix} = T(\varphi + \theta) \end{aligned}$$

Por lo tanto lo que se había propuesto no carece totalmente de sentido. Y la transformación inversa correspondería a una transformación en la que el ángulo es  $-\varphi$ , lo cual es bastante lógico, esto también se puede demostrar para las transformaciones en dos dimensiones.

De manera natural surge ahora un problema esencial, que es el de encontrar una transformación lineal de  $T(s)$  de  $V$  a él mismo, que sea continua en  $s$  y que satisfaga las condiciones:

$$\begin{aligned} T(s)T(t) &= T(s+t) \\ T(0) &= I \end{aligned}$$

Si ahora derivamos la primera ecuación con respecto a  $s$  y luego evaluamos  $s$  en cero y llamamos a esta derivada  $A$ , tenemos:

$AT(t) = T'(t)$  y aplicando la condición inicial tenemos:

$$T(t) = \text{Exp}[tA] = 1 + tA + (tA)^2 / 2! + \dots$$

La transformación lineal  $A$  si llama la transformación infinitesimal de un grupo de Lie de una dimensión. Así se tiene el siguiente teorema:

**Teorema 4.** Cualquier representación continua de un grupo traslacional de una dimensión mediante transformaciones lineales de un espacio vectorial finito es generado por una transformación lineal infinitesimal  $A$  y está dada por:

$$T(t) = \text{Exp}[tA] = 1 + tA + (tA)^2 / 2! + \dots$$

El teorema fue generalizado a espacios vectoriales más generales, e.g., infinitos por E. Hille y K. Yosida. Sin embargo no mencionaré directamente el teorema sino que lo haré aparecer explícitamente mediante una aplicación interesante a la Mecánica Cuántica.

Supongamos un sistema mecánico cuántico que se aísla del resto del universo por un tiempo  $T$ . Podemos decir que el estado del sistema durante un periodo de  $0 - \epsilon$  a  $0 + \epsilon$  está dado por  $\psi_0$ . Por lógica el estado siguiente del sistema va a depender de  $\psi_0$ , de manera que podemos escribir que:  $\psi(t) = U(t)\psi_0$  y si asumimos que  $U(t)$  es unitaria, lo cual es un postulado bastante razonable, podemos llegar a la conclusión de que:  $U(s+t) = U(s)U(t)$  y  $U(0) = I$ . Ahora a través de lo que demostraron Stone, Hille y Yosida, existe un operador auto adjunto que llamaremos  $H$  tal que:

$U(t) = \text{Exp}[-i H t]$  y haciendo una analogía con lo que se hizo con  $A$  tenemos que si diferenciamos:

$$\psi'(t) = -i H\psi(t).$$

Esto tiene, salvo constantes, la misma forma de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo. De manera que, salvo constantes,  $H$  es el Hamiltoniano. Ahora a través de la transformada de Laplace se puede obtener que :

$$R(u)\psi_0 = \int_0^{\infty} e^{-ut}\psi(t)dt$$

$$R(u)\psi_0 = (uI + iH)^{-1}\psi_0$$

Y mediante la fórmula de inversión uno tiene que:

$$\psi(t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\epsilon - iM}^{\epsilon + iM} e^{ut} R(u)\psi_0 du$$

De esta forma hemos resuelto la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, de manera que no todo se ha quedado en el discurso teórico sino que hemos encontrado una forma muy adecuada de resolver la ecuación de Schrödinger. No he querido ahondar demasiado en los detalles, pues son demasiado teóricos y difíciles de comprender. He querido dar este ejemplo como una muestra de lo poderosa que puede llegar a ser la teoría que aquí se expone.

Si generalizamos estos conceptos a un grupo de Lie de  $n$  dimensiones, éste consiste de las transformaciones lineales  $T$  con  $n$  parámetros en la vecindad de  $I$ , que pueden ser escogidos de tal manera que:

$$T(s) = I + s_1 I_1 + s_2 I_2 + \dots$$

A esto se le puede asignar la representación siguiente haciendo los mismos pasos que en el caso unidimensional:

$$T = \text{Exp}[s_1 I_1 + s_2 I_2 + \dots]$$

Y se puede definir  $J = s_1 I_1 + s_2 I_2 + \dots$

Donde esta  $J$  es una transformación lineal y forma un Álgebra, de hecho esta es el Álgebra de Lie donde se definen tres operaciones:

1. Suma
2. Multiplicación por reales
3. Y el conmutador  $[A,B]$  que es el conmutador clásico de Mecánica Cuántica.

Resulta ser que la operación  $[A,B]$  es cerrada, i.e., el resultado vuelve a pertenecer al Álgebra de Lie. De manera que en general uno puede escribir:

$$[L_i, L_j] = C_{ij} L_k \quad \text{Donde esta } C \text{ puede ser una suma de constantes sobre los índices } i \text{ y } j.$$

Esta última relación es de suma importancia en el momento angular orbital. Como bien se sabe el concepto clásico de momento angular es  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ . Sin embargo en Mecánica Cuántica el momento  $\mathbf{p}$  es ahora un operador que tiene la forma  $-i\nabla$ , donde este último símbolo  $\nabla$  es el operador nabla. De esta manera el momento angular orbital en Mecánica Cuántica toma la forma:

$$\mathbf{L} = -i \mathbf{r} \times \nabla .$$

Claramente se ve que el momento angular orbital es un operador, solo carece de sentido tiene que aplicarse a la función de onda  $\psi$  para que obtenga un sentido físico. Resulta que las componentes del momento angular  $\mathbf{L}$  obedecen las siguientes operaciones con el conmutador:

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k$$

Donde  $\epsilon_{ijk}$  es el símbolo de Levi-Civita. Se sobreentiende que cuando observamos una expresión multiplicada en la que aparece el índice repetido utilizamos la convención de sumatoria de Einstein. También se puede demostrar que  $[\mathbf{L}^2, L_i] = 0$ . De esta manera podemos ver que el operador  $\mathbf{L}$  forma un Álgebra de Lie, y todas las propiedades de esta Álgebra pueden ser utilizadas en el concepto de momento angular orbital.

Muchos de los conceptos de Teoría de Grupos pueden ser aplicados no solo al momento angular orbital, sino también al espín. En 1896, Zeeman observó que cuando un átomo se coloca en la presencia de un campo magnético externo y se excita, las líneas espectrales que resultan del proceso de desexcitación, i.e., cuando el electrón baja de nivel se desdoblan en varias componentes. El efecto Zeeman indica que los niveles de energía del átomo, se desdoblan en varias componentes bajo la presencia de un campo magnético externo. En ciertos casos especiales, que se les llamó normales, estos desdoblamientos de los niveles de energía podían entenderse en términos de una teoría clásica que fue desarrollada por Lorentz. Pero en casos generales, que se les llamó anómalos no era posible una explicación de los desdoblamientos hasta que se desarrolló la Mecánica Cuántica y se introdujo el concepto de espín.

El experimento conocido de Stern-Gerlach, que no describiré aquí, demuestra que el momento angular de un electrón que gira está cuantizado, i.e., la componente en una dirección arbitraria puede tener valores discretos, tal y como sucede en el caso del momento angular orbital. De hecho la componente del momento en cualquier dirección es siempre  $+\hbar/2$  ó  $-\hbar/2$ . Es precisamente esta cuantización del espín la que explica el desdoblamiento múltiple en las

líneas espectrales. De todas formas el efecto de la energía en el espín es pequeño comparado con el de la carga y la masa, siempre y cuando no haya un campo magnético externo.

Para ver como se aplica la Teoría de Grupos al espín desarrollaré un poco más las matemáticas involucradas con el espín.

Como existe un espín, i.e., un giro en el electrón, ya no podemos considerar a éste como una masa puntual en las coordenadas  $x, y, z$ . Se tiene que añadir por fuerza un grado de libertad adicional. Asumamos ahora que este grado de libertad adicional es designado por  $s$ , donde  $s$  solo puede tomar los valores  $+1$  ó  $-1$ . De manera que ahora vamos a tener un par de funciones:

$$\varphi_1 = \varphi(x,y,z,1) \quad \text{y} \quad \varphi_2 = \varphi(x,y,z,-1)$$

Es obvio que la integral de  $\varphi_1^* \varphi_1$  sobre todo el espacio es proporcional a la probabilidad de que el electrón con el espín indicado, paralelo al eje  $z$  por ejemplo sea encontrado en el volumen  $V$ . De esta forma la siguiente integral:

$$\int (\varphi_1^* \varphi_1 + \varphi_2^* \varphi_2) dV$$

Da la probabilidad de que el electrón se encuentre en un volumen  $V$ .

De inmediato surge la inquietud de qué sucede con el espín de un electrón cuando se somete a una rotación arbitraria  $R$ , es aquí donde empieza a jugar papel la Teoría de Grupos.

Pauli fue el primero en sugerir una transformación unitaria:

$$\psi_1' = t_{11}\psi_1 + t_{12}\psi_2$$

$$\psi_2' = t_{21}\psi_1 + t_{22}\psi_2$$

Las  $t$ 's que son los elementos de una matriz se les conoce como los parámetros Cayley-Klein de una rotación especial, en este caso de una rotación inversa  $R^{-1}$ . Consideremos ahora el estado del electrón definido por un par de funciones  $(\psi_1, \psi_2)$  que son funciones de las coordenadas espaciales. Cuando la rotación  $R$  se aplica el nuevo estado está representado por las funciones  $(\psi_1', \psi_2')$ . Si el punto  $P$  se transforma a  $P'$  por la rotación entonces las probabilidades de encontrar al electrón en un volumen dado  $dV$  deben de ser iguales, i.e.,

$$\psi_1'^* \psi_1'(P') + \psi_2'^* \psi_2'(P') = \psi_1^* \psi_1(P) + \psi_2^* \psi_2(P)$$

De manera que si  $\psi$  es ahora una matriz que contiene al par de funciones  $(\psi_1, \psi_2)$ , podemos escribir lo siguiente:

$$\psi'(P') = \mathbf{T} \psi(P), \text{ donde } \mathbf{T} = \mathbf{T}(R), \text{ i.e., una función de la rotación.}$$

Si  $b = \text{Exp}[ia]$  es un número complejo, su valor absoluto es uno, entonces las funciones  $b\psi$  determinan el mismo estado. El conjunto de todas las matrices  $b\mathbf{T}$ , donde  $b$  varia en el círculo unitario se llaman transformaciones proyectivas unitarias  $T_p$ . Estas transformaciones forman un grupo proyectivo unitario.

Ahora consideremos la ecuación:

$$\mathbf{T}(\mathbf{RS}) = \pm \mathbf{T}(\mathbf{R})\mathbf{T}(\mathbf{S})$$

Si se escoge que  $\mathbf{T}(\mathbf{R}) = 1$ , la continuidad de  $\mathbf{T}$  implica que si  $\mathbf{R}$  varía en una vecindad  $U$  de el grupo de rotación, las matrices  $\mathbf{T}(\mathbf{R})$  pueden ser multiplicadas por los factores  $b$  de tal manera que las matrices resultantes difieran de la matriz unidad por menos de una  $\varepsilon$ . De esta manera  $b\mathbf{T}$ , está únicamente determinada en la vecindad  $U$  de  $I$ . Von Neumann demostró que esas representaciones continuas de una vecindad de  $I$  en un grupo de Lie son siempre analíticas y se determinan por las matrices que dan las transformaciones infinitesimales del grupo. En este caso esas matrices infinitesimales, (en este caso la representación debe ser de orden 2) son:

$$I_x = \frac{1}{2i} s_1 = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I_y = \frac{1}{2i} s_2 = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$I_z = \frac{1}{2i} s_3 = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Las matrices  $s$  son las matrices de Pauli.

Supongamos ahora que primero aplicamos una rotación al punto  $P$  y transformamos la función  $\psi$  en la función  $\varphi$  y después aplicamos una transformación lineal mediante la matriz  $\mathbf{T}(\mathbf{R})$ , teniendo así:  $\psi'(\mathbf{P}') = \mathbf{T}(\mathbf{R})\varphi(\mathbf{P}')$ . De la teoría se sabe que la rotación infinitesimal del punto  $P$  da como resultado:

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} = - \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi$$

Donde  $\alpha$  es el ángulo de rotación.

Si ahora hacemos lo segundo que se indicó, i.e., aplicar una transformación lineal da el resultado  $\mathbf{I}\psi$ , donde  $\mathbf{I}$  son las matrices que se definieron anteriormente. Así el resultado total de una rotación infinitesimal aplicada a  $\psi$  es para cada uno de los ejes de rotación:

$$K_x \psi = - \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi + \frac{1}{2i} s_1 \psi$$

$$K_y \psi = - \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \psi + \frac{1}{2i} s_2 \psi$$

$$K_z \psi = - \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi + \frac{1}{2i} s_3 \psi$$

El momento angular sin tener en consideración el espín respecto al eje x es:

$$\frac{h}{2\pi} L_x = \frac{-i\hbar}{2\pi} \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

Si multiplicamos ahora por el operador de la transformación infinitesimal total

$$K_x = - \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{1}{2i} s_1$$

por  $i\hbar/2\pi$ , el primer término es el operador momento angular, de manera que es razonable suponer que el segundo término sea el momento del espín. De hecho lo es, esta prueba fue dada por Dirac en su famoso artículo de 1928: "The Quantum Theory of the electron".

A continuación centraré mi atención en dos grupos que son de suma importancia para Mecánica Cuántica. El grupo SO(3) y el grupo SU(n) ("Special Unitary). Este último está formado por todas las transformaciones unitarias de n variables complejas que tienen determinante 1. Mientras que el anterior, como ya se mencionó son todas las rotaciones del espacio vectorial real en tres dimensiones. Como se verá a continuación estos dos grupos están cobrando mucha importancia en la teoría de partículas elementales.

Supongamos que tenemos un electrón en un potencial simétrico atractivo. La solución para la ecuación de Schrödinger, i.e., la función de onda  $\psi$  para el electrón puede ser caracterizada con los números cuánticos n, l y m, que están relacionados con los eigenvalores de los operadores H,  $L^2$  y  $L_z$ . Sin embargo la energía es degenerada en  $2l + 1$  y esto se ve del hecho de que el Hamiltoniano es invariante bajo rotaciones espaciales ordinarias. Debido a la simetría del potencial, L es constante, y se puede, en principio asociar a las componentes de L como los generadores del grupo SO(3) es decir del grupo de rotación. Estos generadores se pueden representar como matrices porque al fin y al cabo son operadores, y la dimensión de estas matrices es igual al número de estados degenerados. Sin embargo esta degeneración se quita si se introduce un campo magnético constante B. Cuando esto sucede se tiene que añadir un término a la ecuación de Schrödinger que no es invariante bajo SO(3).

Si la masa del protón y del neutrón, por ejemplo se consideran prácticamente iguales, se les puede asociar un isoespín, que es un estado que no tiene nada que ver con el espín. La proyección en el eje z del isoespín es  $1/2$  para el protón y  $-1/2$  para el neutrón. Aunque físicamente no tenga nada que ver con el espín, es importante decir que el isoespín obedece las mismas reglas matemáticas. Para el nucleón por ejemplo se puede escribir que  $I = s/2$  donde s son las matrices de Pauli. Los piones que son tres, son los portadores de la fuerza fuerte, y la interacción fuerte trata de manera similar a este grupo de partículas y se conserva el isoespín. Es importante decir que el isoespín está caracterizado por el grupo SU(2), i.e., es invariante respecto a este grupo.

Si el protón y el neutrón se ven como dos estados independientes de la misma partícula, lo más natural es representarlos mediante los términos de un vector bidimensional:

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para 1960 se habían descubierto muchas partículas más y los números cuánticos que se conservaban eran la tercera componente del isoespín,  $I^2$  y  $Y$  que es la hipercarga que es simplemente dos veces la carga promedio del multipleteo.

Así como los piones forman un grupo de tres los bariones como el nucleón forman un octeto y la simetría correspondiente se le conoce como “eightfold way”, (no he encontrado traducción al español). Fue en 1961 que Gell-Mann y Ne’eman, de manera independiente sugirieron que la interacción fuerte es aproximadamente invariante bajo un grupo tridimensional  $SU(3)$  y este grupo  $SU(3)$  (“flavor symetry”). Este grupo tenía que tener una representación de ocho dimensiones por los bariones degenerados y cuatro octetos similares para los mesones. En cierto sentido  $SU(3)$  no es más que una generalización de  $SU(2)$  isoespín. . Sus generadores son:

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

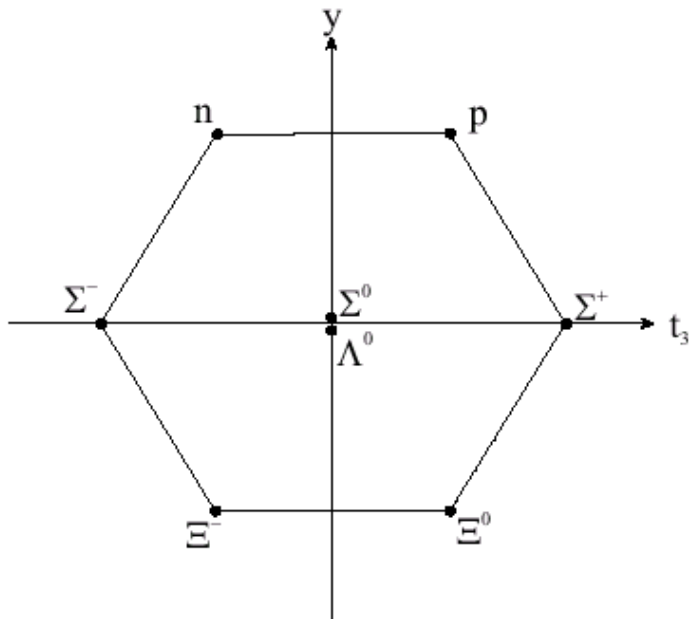
$$\lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Así podemos ahora ver como el Hamiltoniano para los ocho bariones tiene tres partes: una parte que representa la fuerza fuerte, otra el potencial del medio y otra el potencial electromagnético. Con teoría de perturbaciones de Mecánica Cuántica se pueden encontrar relaciones simples para las masas de los bariones. El modelo  $SU(3)$  ha sido muy exitoso porque ha predicho la existencia de nuevas partículas. Sin embargo cabe mencionar que la representación de ocho dimensiones no es la representación más simple de  $SU(3)$ . En la Figura 2 se muestra la representación más simple, que es un forma de triángulo. Esta representación fundamental contiene el los quarks  $u$  (up),  $d$  (down), y  $s$  (strange), y en una figura igual pero invertida se tendrían los correspondientes antiquarks. Cuando estos conceptos se juntan con el principio de exclusión de Pauli da lugar a la teoría  $SU(3)$  de norma de la interacción fuerte que se llama Cromodinámica Cuántica.

Es importante resaltar que la Teoría de Grupos identifica y formaliza las simetrías. Además clasifica y en algunas ocasiones predice las partículas. Nos dice que una parte del

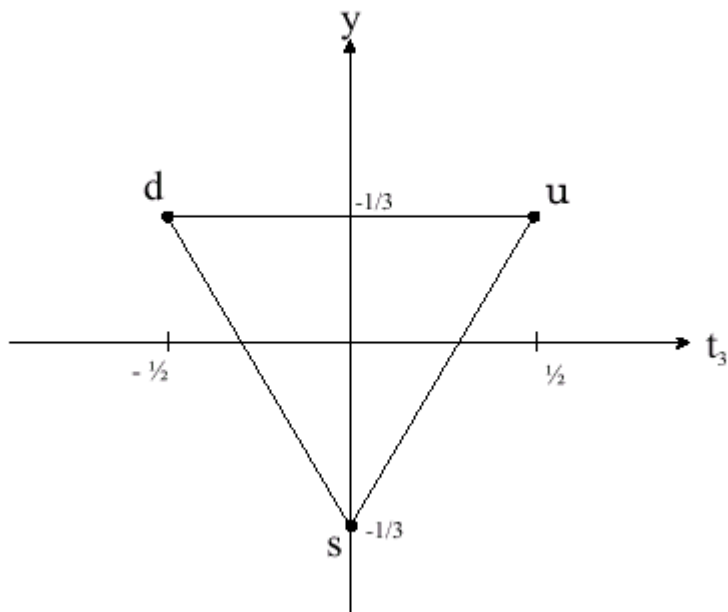
Hamiltoniano tiene simetría SU(2) y otra SU(3), pero no nos dice nada acerca de la interacción entre las partículas.

Figura 1



Nota  $t_3=I_3$ , la tercera componente del isospín

Figura 2



## Cuaterniones

Los cuaterniones son otro tipo de números que tienen la propiedad de manejar las rotaciones de una forma muy adecuada y elegante. Cuando encontramos la ecuación:

$$i^2 = -1$$

inmediatamente sabemos de que se trata, del número imaginario. Este número dio origen a un nuevo tipo de números que son los números complejos. Sin embargo para una persona que nunca ha visto esta ecuación esto puede resultar algo inquietante. ¿Qué es un número complejo?

De hecho, en la edad media hubo un sacerdote español que llevó este asunto frente a la inquisición, pues se pensaba que tales objetos que dan lugar a la ecuación anterior no eran obra de Dios. De igual manera nos resulta algo sorprendente hablar de una nueva clase de números: los cuaterniones. El inventor de los cuaterniones fue Sir William Rowan Hamilton, que fue astrónomo de la Real Academia Irlandesa. Otra persona que también, quizá como ningún otro durante la época de Hamilton aportó mucho al estudio de los cuaterniones fue Olinde Rodrigues, el mismo Rodrigues que es conocido por haber desarrollado la fórmula de Rodrigues para los polinomios de Legendre. Rodrigues fue el hijo de un banquero judío y en general tenía una situación económica bastante aceptable, sin embargo no fue tan reconocido como Hamilton. Es impresionante como está documentada la vida de Hamilton, se sabe hasta el momento mismo de su nacimiento. (media noche entre el 3 y 4 de agosto de 1805 en Dublín). A los siete años de edad Hamilton tenía un dominio del lenguaje hebreo mucho mayor que muchos en Trinity College en Dublín, donde estudió algún tiempo. A los diez años de edad se dice que Hamilton dominaba diez lenguajes orientales, además de Latín, Griego y varios otros lenguajes europeos. A la edad de 22 años fue astrónomo de la Real Academia Irlandesa, verdaderamente se trataba de una persona muy dotada.

Hamilton se interesó por los números complejos desde principios de 1830. Por más de diez años Hamilton trató de extender el concepto de número complejo a  $a + ib$  de manera que pudiera definir un triplete, con una unidad real y dos unidades imaginarias  $i$  y  $j$ , fueran éstas últimas lo que fueran. Sin embargo eso no fue posible. Fue entonces un lunes, el 16 de octubre de 1843, uno de los días más documentados en la historia de las Matemáticas. Este día por la mañana Hamilton acompañado por Lady Hamilton, caminaban por el Royal Canal en Dublín hacia la Real Academia Irlandesa. Una vez que pasó el puente Broome (que erróneamente Hamilton llamaba puente Brougham y desde entonces se siguió llamando así), Hamilton se dio cuenta de que eran tres y no dos unidades imaginarias las que se necesitaban con las propiedades siguientes:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = k \quad ji = -k$$

con una permutación cíclica de  $i$ ,  $j$  y  $k$  de 2. Hamilton escribió estas fórmulas en una piedra del puente. De esta manera llamó al número:

$$q = a + bi + cj + dk$$

cuaternión. Fue así como los cuaterniones nacieron. Este es uno de los momentos en la historia que producen una sensación especial. ¡Un nuevo ente matemático nació! ¡Nació un nuevo mundo!, en lo personal me causa una sensación como la que experimenta uno al oír la obra de la

Creación de Haydn, en la parte en la que el coro dice: “Und eine neue Welt entspringt auf Gottes Wort”, (un nuevo mundo nace por la palabra de Dios).

Resulta que así como el número  $i$  puede representar una rotación de  $90^\circ$  en el plano de Argand, de una manera similar los cuaterniones también representan rotaciones. De hecho es el álgebra de las rotaciones. Si  $a$  en la definición de  $q$  se hace cero tenemos lo que Hamilton llamó un cuaternión puro:  $ai + bj + ck$ , y Hamilton le dio el nombre de vector. De hecho esta es la razón por la que hasta hoy en día  $i$ ,  $j$  y  $k$  son usados como los vectores unitarios. Surgió un problema sin embargo, ya que por 1846 la gente ya estaba pensando en ciertos objetos físicos muy parecidos a lo que hoy conocemos como vectores y la identificación de Hamilton con lo que tenían en mente causó mucha confusión.

Como ya mencioné al principio los cuaterniones quedaron en desuso. Sin embargo en 1912, se publicaron dos trabajos que por desgracia Hamilton no alcanzó a ver. Estos tenían que ver con el tiempo que se manejaba en una presentación de la teoría de la relatividad (Silberstein 1912, Conway 1912). En 1940 Whittaker expresó una esperanza de que los cuaterniones podrían convertirse en la expresión más natural de la nueva Física.

A pesar de todo esto los cuaterniones hoy en día no se usan tanto. Esto es una lástima. Pero de nuevo regreso a lo que dije en la introducción. El estudio de las Matemáticas es bello en sí mismo. Los cuaterniones son unos entes matemáticos que podrían ser utilizados muy elegantemente en Física, pero si no es así, su belleza intrínseca justifica su existencia y estudio.

Como se vio la Teoría de Grupos abarca mucho. Es imposible reducirla en un trabajo, pues se trata del esfuerzo y creatividad de varios matemáticos y físicos durante varios años. Sin embargo en este trabajo he querido dar los lineamientos generales, esperando convencer al lector de dos cosas. La primera de su importancia en Mecánica Cuántica y la segunda y quizá más importante, su belleza.

## **Bibliografía**

Física Cuántica  
Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos y Partículas  
Robert Eisberg, Robert Resnick

Introducción a la Teoría de Grupos Finitos  
Walter Ledermann

Group Thoery and Quantum Mechanics  
B.L. van der Waerden

Group Theory and the Coulomb Problem  
M.J. Englefield

Mathematical Methods for Physicists  
Arfken and Weber

A First Course in Abstract Algebra  
John B. Fraleigh

Rotations, Quaternions, and Double Groups  
Simon L.Altmann

# **Teoría de Grupos y aplicaciones a la Mecánica Cuántica**

**6 de mayo de 2003  
Lope Amigo Santiago  
Mecánica Cuántica**